工学教程「線形代数 II」試用版 (2012 年 3 月 20 日版) 訂正

試用版は，正式出版に先立ち，東京大学工学部において講義資料として準備されたものです．最終形は，

室田一雄・杉原正顯：東京大学工学教程（基礎系 数学）「線形代数 II」，

丸善出版，2013. (ISBN 978-4-621-08714-5 C 3341)

として出版されております．

●命題 2.4（30 頁）の証明を以下のように変更する．

（証明） 固有ベクトルの条件 $A\boldsymbol{z} - \lambda\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ を弱めた不等式条件 $A\boldsymbol{z} - \lambda\boldsymbol{z} \geqq \boldsymbol{0}$ を導入して，任意の非負ベクトル $\boldsymbol{z}$ $(\neq \boldsymbol{0})$ に対して

$$\mu(\boldsymbol{z}) = \max\{\lambda \mid A\boldsymbol{z} - \lambda\boldsymbol{z} \geqq \boldsymbol{0}\}$$

と定義する．上式の右辺で $\lambda = 0$ は不等式条件を満たすので $\mu(\boldsymbol{z}) \geqq 0$ であり，

$$\mu(\boldsymbol{z}) = \min_{i: z_i > 0} \frac{(A\boldsymbol{z})_i}{z_i}$$

と書けることからもわかるように，$\mu(\boldsymbol{z})$ は有限値 (無限大でない値) である．

次に，$\boldsymbol{z}$ を動かして $\mu(\boldsymbol{z})$ を最大にすることを考えて，

$$\alpha = \sup_{\boldsymbol{z} \geqq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}} \mu(\boldsymbol{z})$$

と定義する．このとき，次のことに注意する．

(1) 任意の $\boldsymbol{z} \geqq \boldsymbol{0}$ $(\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0})$ に対して，その成分の最大のものを z_{i^*} とすると

$$\mu(\boldsymbol{z}) = \min_{i: z_i > 0} \frac{(A\boldsymbol{z})_i}{z_i} \leqq \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{i^* j} z_j}{z_{i^*}} \leqq \max_{1 \leqq i \leqq n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

が成り立つ．したがって，α は有限値である．

(2) 正の実数 c に対して $\mu(c\boldsymbol{z}) = \mu(\boldsymbol{z})$ が成り立つので

$$\alpha = \sup_{\boldsymbol{z} \geqq \boldsymbol{0},\ \|\boldsymbol{z}\| = 1} \mu(\boldsymbol{z})$$

と書き直せる．したがって，$S = \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{z} \geqq \boldsymbol{0},\ \|\boldsymbol{z}\| = 1\}$ に含まれる点列 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k, \ldots$ で $\mu(\boldsymbol{x}_k) \to \alpha$ を満たすものが存在する．S は有界閉集合

（コンパクト集合）だから，点列 $(\boldsymbol{x}_k)$ は収束部分列 $\boldsymbol{x}_{k(1)}, \boldsymbol{x}_{k(2)}, \ldots, \boldsymbol{x}_{k(l)}, \ldots$ をもち，その極限 $\boldsymbol{x} = \lim_{l\to\infty} \boldsymbol{x}_{k(l)}$ は S に含まれる[*1]．また，不等式 $A\boldsymbol{x}_{k(l)} - \mu(\boldsymbol{x}_{k(l)})\boldsymbol{x}_{k(l)} \geqq \boldsymbol{0}$ において $l \to \infty$ とすると $A\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$ が得られる．したがって

$$A\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$$

である．

(3) $\alpha > 0$ である．なぜならば，A の既約性により A の行和はすべて正であり，一方，$\boldsymbol{1} = (1, 1, \ldots, 1)^\top$ に対して $\mu(\boldsymbol{1})$ は A の行和の最小値に等しいので，$\alpha \geqq \mu(\boldsymbol{1}) > 0$ となるからである．

上の α と $\boldsymbol{x}$ に対して

$$A\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$$

が成り立つことを以下に示そう．行列 A の既約性と命題 2.3(2.1.3 項) により $(I + A)^{n-1} > O$ が成り立つので，$\boldsymbol{y} = (I + A)^{n-1}\boldsymbol{x}$ とおくと $\boldsymbol{y} > \boldsymbol{0}$ となる．

$$A\boldsymbol{y} - \alpha\boldsymbol{y} = (I + A)^{n-1}(A\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{x})$$

であるが，仮に $A\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ とすると，$A\boldsymbol{y} - \alpha\boldsymbol{y} > \boldsymbol{0}$ となり，したがって，$\mu(\boldsymbol{y}) > \alpha$ となるが，これは α の定義に矛盾する．ゆえに $A\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ である．最後に，$\boldsymbol{y} = (I + A)^{n-1}\boldsymbol{x} = (1 + \alpha)^{n-1}\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y} > \boldsymbol{0}$ により $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ が示される．

■

*1　一般に，コンパクト集合の点列は収束部分列をもつ．$\mathbb{R}^n$ においては，コンパクト集合であることと有界閉集合であることは等価であることに注意されたい．なお，関数 $\mu(\boldsymbol{z})$ は連続関数とは限らないので，収束部分列を用いた議論が必要となっている．